Soluciones a los ejercicios de evaluación

1. Se quiere amortizar una deuda de 10 millones de pesetas el día 31 de diciembre de 2005. Esta deuda ha sido contraída el día 1 de enero de 2000, y se incrementa cada trimestre al 6 por 100 anual. Para amortizarla se quiere pagar una cantidad fija el último día de cada mes, empezando el 31 de enero de 2000 y terminando el 31 de diciembre de 2005. Estas cantidades producen un interés anual del 3 por 100, que se acumula mensualmente. ¿Qué cantidad hay que abonar cada mes?

Solución. Como la deuda se incrementa a un interés compuesto (expresado en tanto por uno) del $0,06/4$ cada trimestre, el 31 de diciembre de 2005 la deuda más los intereses será igual a:

$$10^7\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{24}$$

Llamemos P a la mensualidad que tendremos que pagar al final de cada mes. Dichas mensualidades se capitalizan a interés compuesto del $0,03/12$ cada mes. La primera mensualidad permanece un total de 71 meses y la última, al pagarse el último día del mes no genera ningún interés. La cantidad total que tendremos el 31 de diciembre de 2005 será igual a:

$$P\left[\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{71}+\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{70}+\cdots+\left(1+\frac{0,03}{12}\right)+1\right]=P\left[\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{72}-1\right]\frac{12}{0,03}$$

En consecuencia, deberá ser:

$$P\left[\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{72}-1\right]\frac{12}{0,03}=10^7\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{24}$$

Usando una calculadora se obtiene: $P=181{,}457$ donde hemos redondeado por exceso.

Podemos también hacer el cálculo anterior teniendo en cuenta la aproximación para n grande $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \approxeq \mathrm{e}^r$ de la siguiente forma:

$$\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{72}=\left(1+\frac{1}{400}\right)^{72}=\left[\left(1+\frac{1}{400}\right)^{400}\right]^{72/400}\approxeq \mathrm{e}^{72/400}$$

$$\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{24}=\left(1+\frac{3}{200}\right)^{24}=\left[\left(1+\frac{3}{200}\right)^{200}\right]^{24/200}\approxeq \mathrm{e}^{72/200}$$

En consecuencia:

$$P\approxeq 10^5\frac{\mathrm{e}^{72/200}}{4(\mathrm{e}^{72/400}-1)}=181{,}695$$

donde hemos redondeado por exceso.

Comentario: es una buena aproximación.

2. Pruébense las igualdades

(a) $\arccos x+\operatorname{arc\,sen} x=\dfrac{\pi}{2}\quad \forall x\in[-1,1]$

(b) $\tan(\operatorname{arc\,sen} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\sec(\operatorname{arc\,sen} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\forall x \in]-1,1[$

Solución.
(a) Puede comprobarse esta igualdad de muchas formas. Por ejemplo, si despejamos, podemos escribir la igualdad de la forma:

$$\operatorname{arc\,sen} x = \pi/2 - \operatorname{arc\,cos} x$$

Puesto que $-\pi/2 \leqslant \pi/2 - \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi/2$ *y en el intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$ *la función seno es inyectiva*, la igualdad anterior es equivalente a la siguiente: $x = \operatorname{sen}(\pi/2 - \operatorname{arc\,cos} x)$ la cual es efectivamente cierta porque, para todo $x \in [-1,1]$ es:

$$\operatorname{sen}(\pi/2 - \operatorname{arc\,cos} x) = \operatorname{sen}(\pi/2)\cos(\operatorname{arc\,cos} x) - \cos(\pi/2)\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,cos} x) = x$$

(b) Para todo $x \in]-1,1[$ es:

$$\tan(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x)}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \frac{x}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}$$

Ahora como

$$\cos^2(\operatorname{arc\,sen} x) = 1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x) = 1 - x^2$$

y además $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) > 0$, se sigue que $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1-x^2}$ lo que prueba la igualdad pedida.

Análogamente, se tiene que:

$$\sec(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \text{por lo antes visto} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Pruébese por inducción la igualdad:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx) = \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x$$

Solución. La igualdad es evidentemente cierta para $n = 1$. Supongamos que es cierta para un número natural n y probemos que entonces lo es también para $n+1$. Tenemos:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx + \operatorname{sen}(n+1)x) = \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n+1)x$$

En consecuencia, todo se reduce a probar que:

$$\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n+1)x = \operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x$$

Usando que $\operatorname{sen}(2a) = 2\operatorname{sen} a \cos a$ y que $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$, tenemos:

$$\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n+1)x = \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\left[2\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\cos\frac{n+1}{2}x\right] =$$

$$= \operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\left[\operatorname{sen}\frac{nx}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{n+1}{2}x\right] = \operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\left[\operatorname{sen}\frac{nx}{2} + \operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x + \operatorname{sen}\frac{-nx}{2}\right] =$$

$$= \operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x$$

como queríamos probar.